



TEKNILLINEN TIEDEKUNTA

GOLFPALLON LIIKERADAN MALLINNUS

Petteri Lintula

Konetekniikan tutkinto-ohjelma

Kandidaatintyö 2020

TIIVISTELMÄ

Golfpallon liikeradan mallinnus

Petteri Lintula

Oulun yliopisto, Konetekniikan tutkinto-ohjelma

Kandidaatintyö 2020, 34 s. + 3 s. liiteitä

Työn ohjaaja yliopistolla: Hannu Koivurova

Kandidaatintyöni tavoitteena on luoda Python-ohjelma, jonka avulla voidaan mallintaa golfpallon lentoa tietyissä olosuhteissa. Työssä pyritään ottamaan huomioon keskeiset laskentaan vaikuttavat tekijät golfpallon kannalta.

Teorialähteinä on käytetty golfpallosta ja aerodynamiikasta kertovaa kirjallisuutta. Tietoa golfista on kerrottu omien kokemuksien sekä internetistä löytyvien lähteiden avulla. Python-ohjelmoinnin ohjeita sekä vinkkejä on myös etsitty internetistä.

Syntynyt ohjelma ei kykene täydellisesti kuvaamaan golfpallon lentorataa, sillä lento on draiverilla lyötäessä liian pitkä, sekä hitaammilla mailoilla lyötäessä liian symmetrinen. Saatuihin kaavoihin tehdyillä pienillä muutoksilla saadaan lennosta lähes todenmukainen. Ohjelman avulla saadaan yleinen käsitys siitä, millainen lentorata erilaisilla mailoilla lyötäessä palloille syntyy. Syntynyttä ohjelmaa voidaan pienin muutoksin hyödyntää monipuolisesti erilaisten kappaleiden lentoratojen tutkimiseen.

Asiasanat: aerodynamiikka, golf, dynamiikka

ABSTRACT

Modelling of golf ball flight trajectory

Petteri Lintula

University of Oulu, Degree Programme of Mechanical Engineering

Bachelor's thesis 2020, 34 pp. + 3 pp. appendixes

Supervisor: Hannu Koivurova

The goal of my bachelor's thesis is to create a python program that is able to model the flight trajectory of a golf ball under specific conditions. The program aims to take in consideration all the relevant factors that may affect the flight of a golf ball

The theory behind the flight properties of a golf ball and aerodynamics has been mostly gathered from related literature and research. Information about golf as a sport has been gathered from the internet and from personal experience. Guides on writing the python program was searched from the internet.

The program that was created in this thesis is not capable of modelling the trajectory accurately. When hit with driver the flight is longer than in real world scenarios and when hit with lower speeds, the flight path is too symmetric. The program is still capable of giving insight on the flight paths of golf ball when hit with different clubs. The program that was developed could be used to model the flight of other bodies.

Keywords: aerodynamics, golf, dynamics

ALKUSANAT

Tämä kandidaatintyö on tehty osana Oulun yliopiston konetekniikan kandidaatin tutkintoa. Työn idea heräsi jo kevään aikana, mutta varsinainen tekeminen alkoi vasta marraskuussa. Työssä tutustun golfiin ja etenkin sitä pelatessa käytettävään palloon aiempaa tuntemustani tarkemmin. Työssä olen pystynyt hyödyntämään omaa tietämystäni golfista lajina sekä osaamistani jota olen opiskeluvuosieni aikana saanut. Halusin sisällyttää työhöni ohjelmointia sillä kävin ohjelmointiin liittyvän kurssin, jolloin totesin pitäväni ohjelmoinnista. Työn aihe valikoitui kiinnostuksesta dynamiikkaa kohtaan, joka taas heräsi työn ohjaajan dynamiikan kurssilla. Kyseisin kurssin aikana pääsin myös hyödyntämään ohjelmointiosaamista laskiessani kurssitehtäviä.

Haluan kiittää työn ohjauksesta sekä innostuksesta dynamiikkaa kohtaan yliopistonlehtoria Hannu Koivurovaa.

Oulu, 24.11.2020

Petteri Lintula

SISÄLLYSLUETTELO

TIIVISTELMÄ

ABSTRACT

ALKUSANAT

SISÄLLYSLUETTELO

MERKINNÄT JA LYHENTEET

1 Johdanto	7
2 Golf lajina.....	8
2.1 Peliympäristö.....	8
2.2 Golfmailat	9
2.2.1 Draiverit ja väyläpuut	10
2.2.2 Raudat, hybridit ja wedget.....	10
2.2.3 Putterit.....	10
2.3 Mailojen nostokulmat.....	10
2.4 Erilaiset lyönnit	11
2.5 Pallon lyöntitapahtuma.....	12
3 Golfpallo	14
3.1 Rakenne.....	14
3.2 Ominaisuudet	14
4 Golfpallon liikeradan fysiikka.....	16
4.1 Heittoliikkeen liikerata ja liikeyhtälö.....	16
4.2 Aerodynamiikka golfpallon näkökulmasta	18
4.2.1 Ilmanvastus	18
4.2.2 Noste	20
4.3 Golfpallon liikkeen mallinnus.....	21
5 Golfpallon liikkeen mallinnus.....	23
5.1 Olettamat	23
5.2 Laskentamalli	23
5.2.1 Ensimmäisen laskennan malli.....	23
5.2.2 Ensimmäisen laskennan tulokset	24
5.2.3 Toinen laskentamalli.....	25
5.2.4 Toisen laskentamallin tulokset	26
5.2.5 Kolmas laskentamalli.....	29
5.2.6 Laskennan tulokset	30
6 Yhteenveto	31

7 Lähdeluettelo.....	32
----------------------	----

LIITE

MERKINNÄT JA LYHENTEET

A	pinta-ala
C_D	ilmanvastuskerroin
F_i	ilmanvastuksen luoma voima
F_m	Magnus-efektin luoma voima
F_y	vaikuttavat voimat y-akselin suunnassa
F_x	vaikuttavat voimat x-akselin suunnassa
G	painovoiman luoma voima
N	pyörimisnopeus
Re	Reynoldsin luku
S	pyörimiskerroin
V_t	ilman nopeus suhteessa liikkuvaan kappaleeseen

d	halkaisija
g	putoamiskiihtyvyys
m	massa
s	Magnus-kerroin
t	aika
v	nopeus
v_{0x}, v_{0y}	lähtönopeudet x ja y suuntiin
x_0	lähtöpisteen x-koordinaatti
x''	x-koordinaatin toinen aikaderivaatta
y_0	lähtöpisteen y-koordinaatti
y''	y-koordinaatin toinen aikaderivaatta

α_0	Lähtökulma suhteessa vaakatasoon
μ	dynaaminen viskositeetti
ρ	tiheys
ω	kulmanopeus

1 JOHDANTO

Tässä työssä tutustutaan golfpallon liikerataan sen ilmalennon aikana. Lentorataa mallinnetaan tietokoneohjelmalla. Tavoitteena on luoda ohjelma, jolla golfpallon liikerataa voidaan simuloida todenmukaisesti ohjelmalle annettujen parametrien avulla. Mallinnuksen mahdollistamiseksi, laskennassa on rajattu ulos muuttujia, jotka todellisuudessa voisivat vaikuttaa kappaleen lentoon. Tässä työssä ei oteta kantaa golfpallon liikkeeseen sen laskeutumisen jälkeen.

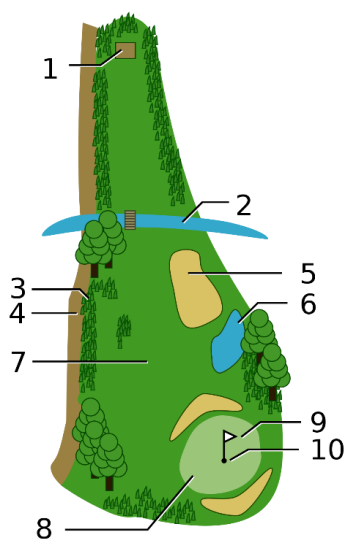
Golfpallon lennon lisäksi työssä tutustutaan golfiin lajina sekä golfpalloon lentävänä kappaleena. Lisäksi tutustutaan fysiikkaan golfpallon lentoon vaikuttavien ilmiöiden takana. Aiheen valintaan vaikutti kiinnostus dynamiikkaa sekä ohjelmointia kohtaan.

2 GOLF LAJINA

Golf on laji, jossa pientä palloa lyödään mailalla ennalta rakennettuja väyliä pitkin kohti reikää, jonne pallon mennessä kyseinen väylä on pelattu. Tavoitteena on saada pallo mahdollisimman vähillä lyönneillä reikään saamatta sakkoja. Väylä voi koostua erilaisista esteistä kuten vesiesteistä, hiekkabunkkereista ja esimerkiksi tolpista, joita tulee ohittaa tietyltä puolelta.

2.1 Peliympäristö

Golfkenttään kuuluu usein 18 väylää. Jokaiselle väylälle on määritetty ”ihannetulos” eli määrä lyöntejä, joilla pallo tulisi saada reikään. Tätä ihannetulosta kutsutaan par:iksi. Useimmin par tuloksen suuruus on joko 3, 4 taikka 5 lyöntiä (Golfdigest 2018). Jos lyönti menee alueelle, joka on ratakartassa määrätty laittomaksi alueeksi, tulee tästä pelaajalle yksi sakkolyönti ja seuraava lyönti on lyötävä uudelleen samasta paikasta kuin se lyönti, joka meni laittomalle alueelle. Esimerkiksi: Pelaaja lyö ensimmäisen lyöntinsä tiiauspaikalta ja pallo laskeutuu laittomalle alueelle. Tämän jälkeen pelaaja jatkaa peliään ottamalla yhden sakkolyönnin ja lyömällä kolmannen lyöntinsä uudelleen tiiauspaikalta. Sama koskee myös tilannetta, jossa pelaaja hävittää pallonsa taikka lyö sen vesiesteeseen. (Kelley 2019)



Kuva 1. Golfväylän tyypillinen rakenne (Toro-tarou 2010).

Golfváylien rakenne on usein samantyyppinen, kuten kuvassa 1 on esitetty. Váylä aloitetaan usein lyömällä palloa avauslyönteihin tarkoitettulla mailalla eli draiverilla. Lyönti suoritetaan tiiauspaikalta (kuvassa 1 kohdassa 1). Tämä lyönti laskeutuu ihannetilanteessa váylälle (kuvassa 1 kohdassa 7), josta pelaamista jatketaan usein rautamailalla. Rautamailalla pallo lyödään griinille (kuvassa 1 kohtdassa 8), jossa ruoho on ajettu todella lyhyeksi tehden pallon vierimisestä vaivattomampaa. Griinillä palloa lyödään putterilla. Putterilla lyödyn lyönnin tavoitteena on pallon saattaminen reikään (kuvassa 1 kohdassa 10). (Golfdigest 2018)

2.2 Golfmailat

Golfmailat jaotellaan seuraaviin kategorioihin: draiverit, váyläpuut, raudat, hybridit, wedget ja putterit. Mailojen eroja voi tarkastella kuvassa 2 olevia mailoja vertaillen. Virallisten sääntöjen mukaan kilpailijalla saa olla mukanaan 14 mailaa. Jokaiselle mailalle on omat käyttökohteensa ja mailavalikoimat vaihtelevat pelaajan taitotasosta ja mieltymyksestä riippuen. (Foy 2019)



Kuva 2. Erilaisia golfmailoja.

2.2.1 Draiverit ja väyläpuut

Draiverit ja väyläpuut ovat mailoja, joilla väylän pelaaminen usein aloitetaan, koska draiverilla pallon lyöminen erittäin kauas on helpointa. Draiverilla lyötäessä pallo on usein koholla tiin, eli pienen tikkumaisen, usein puisen, korokkeen päällä, jotta maila ei osu maahan ja hidastu. Väyläpuilla palloa on mahdollista lyödä myös väylältä eli avauksen jälkeisillä lyönneillä. Draiverit ja väyläpuut eroavat muista mailoista ulkonäöltään siten, että niissä on suuri kupu palloon osuvan kohdan takana. (Foy 2019)

2.2.2 Raudat, hybridit ja wedget

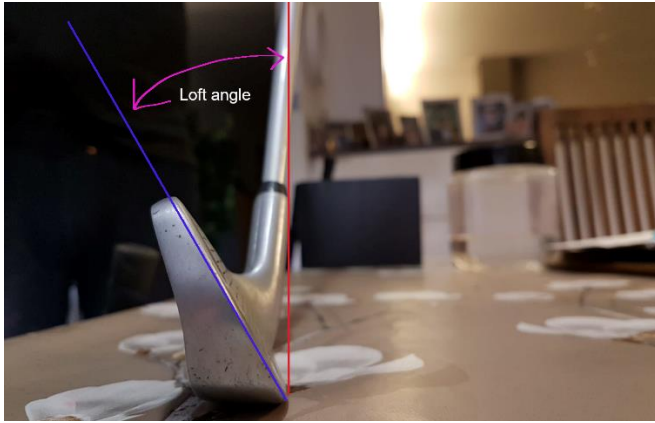
Raudat ovat mailoja, joilla väylälyönnit suoritetaan useimmiten. Raudat on numeroitu yleensä 4 - 9. Hybridimailat ovat mailoja, joilla pelaajat pyrkivät korvaamaan rauta 3 ja 4 mailoja. Hybridimailan etuna on helpompi käytettävyys rautamailaan verrattuna. Hybridimailoissa on väyläpuiden tapaan kupu osumapinnan takana, mutta hybridin kupu on huomattavasti draiverin kupua pienempi. Wedget ovat rautamailoja, joissa nostokulmat ovat todella suuria. Wedgejä käytetään vain erikoistilanteissa kuten hiekkamontusta poistuttaessa ja tilanteessa, jossa pallo on lähellä griiniä. Rautamailojen numerointi toimii siten, että mailan numero kasvaa sitä mukaa kun kulma maasta kohtisuoran ja lavan välillä kasvaa. (Foy 2019)

2.2.3 Putterit

Putteri on lähipelimaila, jolla pallo on tarkoitus lyödä griiniltä reikään. Puttereita valmistetaan nykyään monen eri muotoisia ja mallisia. (Foy 2019)

2.3 Mailojen nostokulmat

Golfissa loft kulmalla eli nostokulmalla tarkoitetaan sitä kulmaa, joka muodostuu maasta kohtisuoran akselin, sekä mailan lavan välille, kuten kuvasta 3 voi nähdä. Tällä kulmalla on suuri merkitys pallon lentoon. Suuremmalla kulmalla varustettu maila, kuten rauta 9, lähettää pallon korkealle ilmaan, mutta ei niin kovin pitkälle. Suuremmat nostokulmat saavat aikaan palloon suuremman pyörimisnopeuden, jolloin aerodynaamisten ilmiöiden suuruus kasvaa. (Jackson 2018)



Kuva 3. Golfmailan nostokulma.

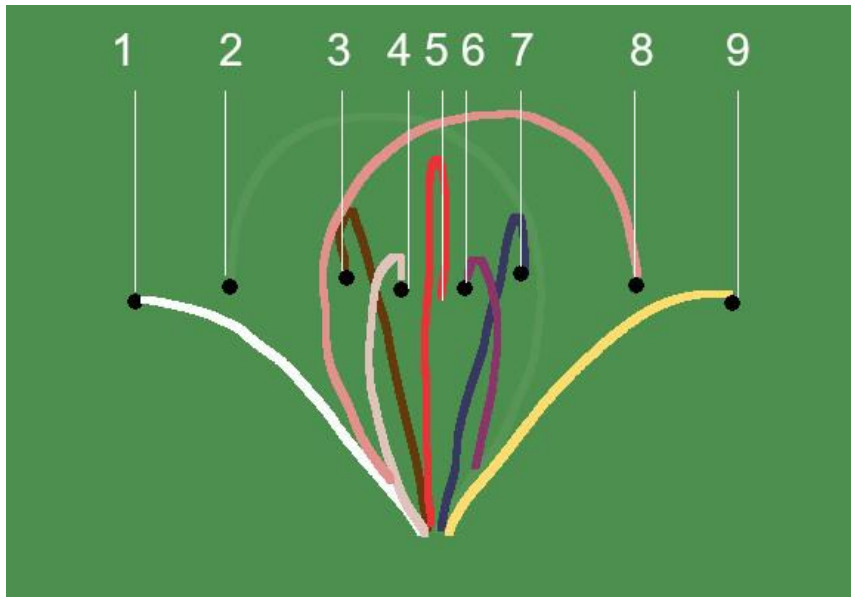
Tässä työssä käytetään laskennassa mailoina Titleistin tuotteita. Draiverina ja hybridinä TS3 sarjan tuotteita ja rautoina T300 sarjan mailoja. Draivereissa ja hybrideissä on valittavissa nostokulma pelaajan mieltymyksen mukaan. Työssä käytetään taulukon 1 mukaisia mailoja ja lähtökulmia.

Taulukko 1. Titleist TS3 ja T300 mailojen nostokulmia (mukaillen Titleist.com 2020a, Titleist.com 2020b).

Maila	Malli	Nostokulma
Draiveri	Titleist TS1	12.5°
Hybridi	Titleist TS3	23°
Rauta 4	Titleist T300	20°
Rauta 5	Titleist T300	23°
Rauta 6	Titleist T300	26°
Rauta 7	Titleist T300	29°
Rauta 8	Titleist T300	33°
Rauta 9	Titleist T300	38°
Wedge	Titleist T300	48°

2.4 Erilaiset lyönnit

Lyöntitapa vaikuttaa olennaisesti siihen, miten golfpallo lentää. Erilaisilla lyönneillä on mahdollista saada palloon erilaisia lentoratoja. Alla kuvassa 4 on esitetty lentoratoja, joita erilaisilla lyönneillä voi saavuttaa. Useimmiten erilaiset lyönnit tulevat tutuksi tilanteessa, jossa suoraa lyöntiä ei saada aikaiseksi ja aletaan etsiä vikaa lyönnistä. (Levy 2016)



Kuva 4. Erilaisten golflyöntien lentoradat.

Kuvassa 4 olevat lyönnit ovat nimeltään seuraavia:

1. Vetohuukki (Pull hook)
2. Huukki (Push hook)
3. Pulli (Pull)
4. Feidi (Fade)
5. Suora (On target / Straight)
6. Draw
7. Pushi/työntö (Push)
8. Slaissi (Pull Slice/Slice)
9. Työntö slaissi (Push slice)

2.5 Pallon lyöntitapahtuma

Kun pelaaja lyö palloa mailalla pallo lähtee liikkeelle eteenpäin ja se alkaa pyöriä. Pyöriminen johtuu siitä, että pallo pyörähtää mailan lapaa pitkin hieman ylöspäin mailan osuessa siihen. Mitä suurempi mailan nostokulma on, sitä kovemman pyörimisnopeuden pallo saa. (McAnally)

Pallon lähtönopeus taas riippuu mailan nopeudesta sekä sysäyskertoimesta. Sysäyskertoimen ollessa 1.5, on pallon lähtönopeus 150 km/h jos mailan pään nopeus on 100 km/h. Huomataan että sysäyskertoimella voi olla merkittävä vaikutus pallon lähtönopeuteen. (Sherman 2017)

Taulukossa 2 on esitetty kokeellisesti saatuja tuloksia golfpallojen lähtötilanteista. Taulukossa on koostettuna eritasoisten lyöjien sekä erilaisten mailojen vaikutuksia pallon liikkeellelähtönopeuteen sekä -kierteeseen.

Taulukko 2. Pallojen lähtönopeuksia sekä pyörimisnopeuksia (mukaillen Foresight sports 2013).

Pienemmät mailanopeudet			Suuremmat mailanopeudet		
Maila	Lähtönopeus (km/h)	Pyörimisnopeus (rpm)	Maila	Lähtönopeus (km/h)	Pyörimisnopeus (rpm)
Draiveri	209	3000	Draiveri	274	2500
Rauta 3	203	4038	Rauta 3	225	4378
Rauta 4	198	4593	Rauta 4	217	4716
Rauta 5	190	4939	Rauta 5	211	5115
Rauta 6	183	5986	Rauta 6	206	6063
Rauta 7	175	6979	Rauta 7	196	6585
Rauta 8	167	7196	Rauta 8	187	7725
Rauta 9	158	8025	Rauta 9	175	9018
Sand wedge	130	9341	Sand wedge	134	11265

3 GOLFPALLO

Golfpallo on väriltään valkoinen, pallon muotoinen kappale. Kaupalliset golfpallot ovat halkaisijaltaan 42.7 mm suuruisia ja painavat keskimäärin 45.5 g. Pallon pinnassa on kaiverruksia, jotka parantavat sen aerodynaamisia ominaisuuksia vähentäen ilmanvastusta ja kasvattaen nosteen määrää, joka palloon vaikuttaa sen lennon aikana. Eri valmistajat tekevät erimallisia kaiverruksia palloihinsa kilpailullista etua tavoitellessaan. Kaiverruksia on esimerkiksi ympyröitä, ympyröitä, joiden sisällä on ympyröitä ja kuusikulmioita. Kaiverrusten määrät vaihtelevat 250 ja 500 välillä. (Alam, Steiner et al. 2011)

3.1 Rakenne

Nyky aikaisten pallojen rakenteessa on useita kerroksia eri materiaaleja. Esimerkiksi Titleist Pro V1 -pallossa, joka on yksi suosituimmista palloista ammattilaisten keskuudessa, uloin kuori on uretaani-elastomeeria, jonka alla on kuorikerros, joka ympäröi itse ydintä. Tässä kyseisessä pallossa on 352 kaiverrusta ja ne ovat muodoltaan tetraedrejä. (Hopley 2019)

3.2 Ominaisuudet

Golfpallon lentoon vaikuttavat olennaisesti sen ilmanvastus ja nosteen määrä. Ilmanvastuksen suuruutta voidaan mitata ilmanvastuskertoimella C_D . Testaamalla golfpallojen ominaisuuksia tuulitunnelissa, on havaittu, että mitä suuremmalla nopeudella pallo kulkee, sen pienempi ilmanvastuskerroin sillä on. Nopeutta ei usein mitata aerodynamiikassa suoraan sellaisenaan vaan tutkitaan Reynoldsin lukua

$$Re = \frac{\rho V_t d}{\mu}, \quad (1)$$

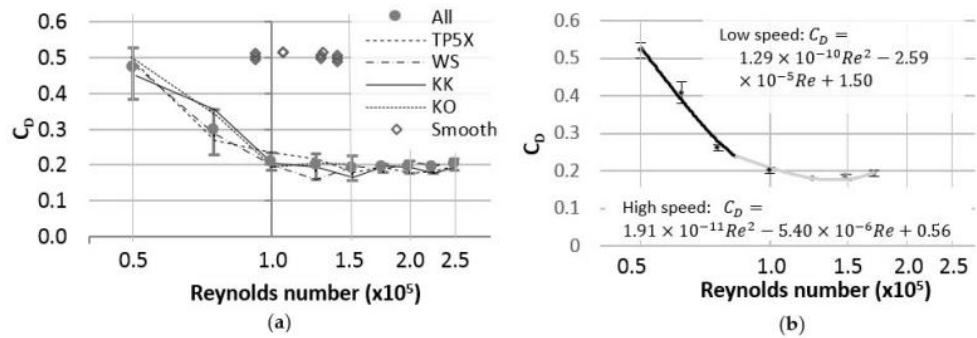
missä ρ on ilman tiheys [kg/m³],

V_t ilmamassan nopeus suhteessa palloon [m/s],

d on pallon halkaisija [m] ja

μ on ilman dynaaminen viskositeetti [kg/m s]. (Alam, Steiner et al. 2011)

Tuulitunneli testauksella on saatu seuraavanlaisia tuloksia golfpallojen ilmanvastuskertoimen ja Reynoldsin lukujen suhteista:



Kuva 5. Reynoldsin lukujen ja ilmanvastuskertoimien suhteita (Lyu, Kensrud et al. 2018).

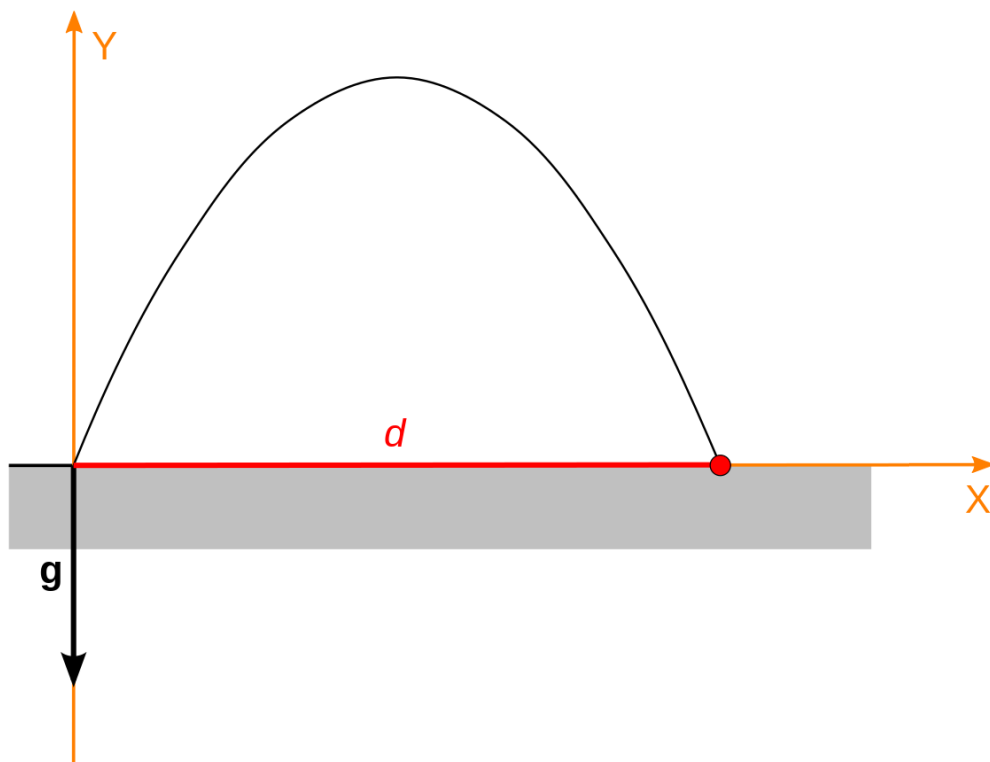
Kuvan 5 oikeanpuoleiseen kuvaajaan on sovitettu käyrät, jotka mukailevat mitattuja ilmanvastuskertoimien arvoja. ”Low speed” nimellä kuvattu funktio tarkastelee nopeuksia, joissa Reynoldsin luku on alle 75 000. ”High speed” funktiolla voidaan kuvata liike Reynoldsin luvusta 75 000 ylöspäin. (Lyu, Kensrud et al. 2018)

4 GOLFPALLON LIIKERADAN FYSIIKKA

Yksinkertaisimmillaan golfpallon samoin kuin minkä tahansa muunkin kappaleen lennon liikerataa voidaan mallintaa heittoliikkeen liikeyhtälön avulla.

4.1 Heittoliikkeen liikerata ja liikeyhtälö

Kappaleen liikerataa voidaan mallintaa vinon heittoliikkeen kaavojen avulla. Vinossa heittoliikkeessä kappale lähtee liikkeelle jostain alkupisteestä, jossa se saa nopeudet suuntiin x (v_x) ja y (v_y). Alkupisteen jälkeen liikettä mallinnetaan tasaisena liikkeenä, jossa kappaleen liikerata tilanteessa, kun kappaleella on lähtönopeutta positiivisen x ja y akselin suuntaan on seuraavanlainen:



Kuva 6. Heittoliikkeen liikerata (Zátonyi 2020).

Kun ainoa kappaleeseen vaikuttava voima on painovoima, on kappaleen lentorata kuvan 6 mukainen. Tämä voima vaikuttaa y akselin suunnassa, joten voidaan kappaleen x- ja y-suuntaiset liikeyhtälöt kirjoittaa Newtonin II lain mukaisesti:

$$\sum F_y = my'' \text{ ja} \quad (2)$$

$$\sum F_x = 0, \quad (3)$$

missä F_y on y-akselin suunnassa vaikuttavien voimien suuruus [N],
 m on kappaleen massa [kg],
 y'' on y-koordinaatin toinen aikaderivaatta eli kiihtyvyys [m/s²] ja
 F_x on x-akselin suunnassa vaikuttavien voimien suuruus [N].

Integroimalla ja supistamalla m-termit pois saadaan y-suuntainen paikka ratkaistua muotoon:

$$my'' = -mg, \quad (4)$$

josta m:ällä jakamalla saadaan

$$y'' = -g, \quad (5)$$

josta integroimalla ajan suhteen saadaan

$$y' = -gt + C_1 \quad (6)$$

ja edelleen integroimalla saadaan

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad (7)$$

missä g on putoamiskiihtyvyys [m/s²],
 y' on y-koordinaatin ensimmäinen aikaderivaatta eli nopeus [m/s],
 t on aika [s] ja
 y on kappaleen paikka y-suunnassa [m].

Tehtäessä samat operaatiot x suunnalle, jossa vaikuttavien voimien summa on 0, saadaan:

$$x = C_3 t + C_4, \quad (8)$$

missä x on kappaleen paikka x-suunnassa [m].

Nyt voidaan ratkaista integrointi vakiot $C_{1,2,3,4}$, ja saadaan että C_1 ja C_3 ovat alkunopeudet suuntiin y ja x ja että C_2 ja C_4 aloituskoordinaatit lennolle. Täten voidaan sanoa että: $C_1 = v_{0y}$, $C_2 = y_0$, $C_3 = v_{0x}$ ja $C_4 = x_0$. (Burglund, Street 2011)

Kun tunnetaan kappaleen lähtönopeus ja lähtökulma suhteessa vaakatasoon, voidaan pallon lähtönopeudet lausua seuraavasti:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 * \cos \alpha_0 \\ v_{0y} = v_0 * \sin \alpha_0 \end{cases} \quad (9)$$

ja paikat ajan funktiona

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} * t + x_0 \\ y(t) = v_{0y} * t - \frac{1}{2} * g * t^2 + y_0 \end{cases} \quad (10)$$

missä v_{0x} on kappaleen lähtönopeuden x-suuntainen komponentti [m/s],

v_0 on kappaleen lähtönopeus [m/s],

α_0 on kappaleen lähtökulma suhteessa vaakatasoon [deg] ja

v_{0y} on kappaleen lähtönopeuden y-suuntainen komponentti [m/s].

Edellisissä kaavoissa oletetaan kappaleeseen vaakasuunnassa vaikuttavien voimien lennonaikana olevan 0 (Mäkelä, Soininen et al. 2017)

4.2 Aerodynamiikka golfpallon näkökulmasta

4.2.1 Ilmanvastus

Ilmanvastus on liikettä vastustava voima, joka syntyy tilanteessa, jossa kappale liikkuu ilmassa läpi suuremmalla nopeudella kuin ilmassa liikkuu itse. Kappaleen muodolla on olennainen merkitys siihen, kuinka suuri tämä liikettä vastustava voima on. Tämä voima johtuu paine-erosta, joka syntyy ilman läpi liikkuvan kappaleen eri puolille. Kappaleen eteen syntyy korkeapaine, sillä ilma ”törmää” kappaleen etuseinään ja

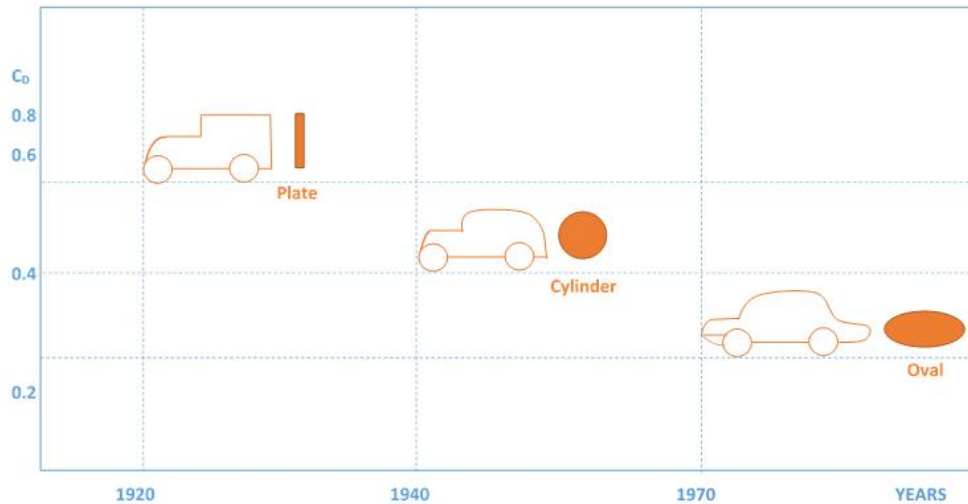
kappaleen taakse syntyy alipaine, sillä ilma ei ehdi täyttää tyhjää tilaa, jonka kappale luo kulkiessaan ilman läpi suurella nopeudella. (Aoyama 2007)

Kappaleet, joiden tulee liikkua suurella nopeudella ilmassa läpi, muotoillaan siten, että ne ovat ilmaa helposti läpäiseviä. Kuvassa 7 olevista ilmanvastuskertoimista nähdään, että kappaleen ulkomuodolla on suuri merkitys kertoimen suuruuteen. Vertauksena esimerkiksi rekka-auto ja formula. Rekan luoma liikettä vastustava voima on huomattavasti suurempi kuin formulan. Kuvassa 8 on kuvattuna erilaisten automallien luomia aerodynaamisia muotoja, eli muotoja, jollaisina ne voidaan ilmaista ilmanvastuslaskennassa. Kuvan 8 muotoja verrattaessa kuvan 7 kertoimiin havaitaan, että kehitys on ollut erittäin positiivista aikojen saatossa. (Aoyama 2007)

Golfpallon tapauksessa kappaleen on oltava pallon mallinen, joka on epäedullinen muoto ilman halkomisen kannalta. Jotta pallon ilmanvastuskerrointa saadaan alennettua, on pallon pinta täynnä pieniä kuperia syvennyksiä. Näiden syvennyksien ansiosta suurella nopeudella ilman halki kulkevan pallon ja ilman väliseen ”pintakerrokseen” eli kerrokseen, joka on lähimpänä pallon pintaa, syntyy pieniä turbulenteja virtauksia. Tämä turbulentti virtaus pallon pinnalla mahdollistaa sen, että ilmavirta pallon ohituksen jälkeen pystyy seuraamaan pallon pintaa paremmin ja näin ollen pienentää ilmanvastuskerrointa huomattavasti. Tämä kertoimen pieneneminen johtuu pienemmästä alipainealueesta pallon takana. Golfpallon pinnanmuodoilla on pallon ilmanvastuskerroin saatu pudotettua lähes puoleen verrattaessa sitä normaaliin sileäpintaiseen samankokoiseen palloon. (Aoyama 2007)

Shape	Drag Coefficient		
Sphere	0.47	Angled Cube	0.80
Half-sphere	0.42	Long Cylinder	0.82
Cone	0.50	Short Cylinder	1.15
Cube	1.05	Streamlined Body	0.04
		Streamlined Half-body	0.09

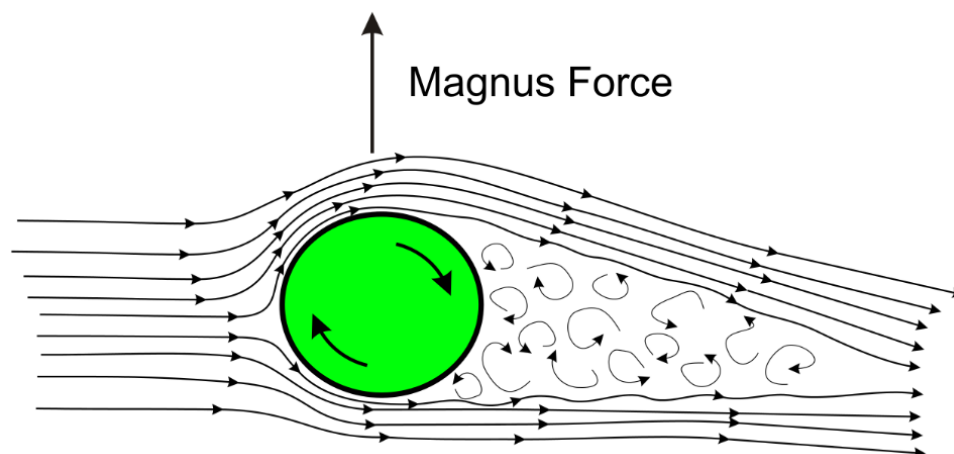
Kuva 7. Erilaisten muotojen ilmanvastus kertoimia (mukaillen TheOtherJesse 2009).



Kuva 8. Eri aikakausien autojen aerodynaamisia muotoja (Eshaan1992 2013).

4.2.2 Noste

Ilman taikka muun väliaineen läpi kulkevaan sylinterimäiseen taikka pallomaiseen kappaleeseen syntyy nostetta sen pyöriessä menosuuntaansa nähden alakierteisesti. Tämän nosteen saa aikaan Magnus-ilmiö (Magnus effect). Ilmiössä oikealta vasemmalle lentävän kappaleen pyöriessä myötäpäivään kappaleen taakse (oikealle puolelle) syntyy virtausta, joka luo nostetta kappaleeseen, kuten kuvassa 9 nähdään. Sama ilmiö saa myös pallon lentoradan kaartumaan aiemmin esitettyjen lentoratojen ”hook” ja ”slice” mukaisesti pyörimisen ollessa muulla kuin maasta kohtisuoralla akselilla. Magnus efekti tapahtuu niin sileillä kuin kuvioituilla pinnoilla, joten ilmiö ei ole pelkästään golffiin sidonnainen. Sen luoman nosteen suuruus riippuu pallon pinnan muodoista, lentonopeudesta sekä pyörimisnopeudesta. Mitä kovempaa pallo kulkee ja pyörii, sen enemmän nostetta syntyy. (Aoyama 2007)



Kuva 9. Magnus efektin luoma ilmavirtaus sekä noste (Rdurkacz 2013).

4.3 Golfpallon liikkeen mallinnus

Nyt golfpallon liikettä mallintaessa tulee ottaa huomioon pelkän painovoiman lisäksi myös edellä mainittujen ilmanvastuksen sekä Magnus-efektin vaikutus pallon lentorataan. Nyt lentorataa voidaan mallintaa seuraavilla kaavoilla:

$$\sum F_y = -G - F_i + F_m, \quad (11)$$

$$\sum F_x = -F_i + F_m \text{ ja} \quad (12)$$

$$\sum F_z = -F_i + F_m, \quad (13)$$

missä G on kappaleeseen painovoima [N],
 F_i on ilmanvastus [N] ja
 F_m on Magnus-efektin luoma nostevoima [N].

Näiden tiedetään olevan suuruudeltaan

$$G = mg, \quad (14)$$

$$F_i = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2 \text{ ja} \quad (15)$$

$$F_m = s(\omega \times v) \quad (16)$$

missä C_d on ilmanvastuskerroin,
 A on pallon pinta-ala [m²],
 s on Magnus-kerroin ja
 ω on kulmanopeus [rad/s].

F_m voidaan lausua myös

$$F_m = s \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_i & \omega_j & \omega_k \\ v_i & v_j & v_k \end{vmatrix}, \quad (17)$$

missä ω_i, j, k sekä v_i, j, k ovat kulmanopeuden sekä nopeuden komponentteja. Kaava (17) voidaan komponentteihin jaettaessa seuraavasti:

$$F_{mx} = s(\omega_j v_k - \omega_k v_j), \quad (18)$$

$$F_{my} = s(\omega_k v_i - \omega_i v_k) \text{ ja} \quad (19)$$

$$F_{mx} = s(\omega_i v_j - \omega_j v_i), \quad (20)$$

missä F_{mx} on Magnus-efektin x-komponentin suuntaan luoma voima [N],
 F_{my} on Magnus-efektin y-komponentin suuntaan luoma voima [N] ja
 F_{mz} on Magnus-efektin z-komponentin suuntaan luoma voima [N].

Myös F_i voidaan lausua x, y ja z suuntaisina komponentteina seuraavasti

$$F_{ix} = \frac{1}{2} C_D \rho A v_x^2, \quad (21)$$

$$F_{iy} = \frac{1}{2} C_D \rho A v_y^2 \text{ ja} \quad (22)$$

$$F_{iz} = \frac{1}{2} C_D \rho A v_z^2 \quad (23)$$

missä F_{ix} on ilmanvastuksen x-komponentin suuntaan luoma voima [N],
 F_{iy} on ilmanvastuksen y-komponentin suuntaan luoma voima [N] ja
 F_{iz} on ilmanvastuksen z-komponentin suuntaan luoma voima [N].

Nyt voidaan muodostaa paremmin lentoa kuvaavat liikeyhtälöt x, y ja z suunnassa seuraavanlaisesti:

$$\sum F_y = m y'' = -G - F_{iy} + F_{my} \Rightarrow y'' = -g - \frac{F_{iy}}{m} + \frac{F_{my}}{m}, \quad (24)$$

$$\sum F_x = m x'' = -F_{ix} + F_{mx} \Rightarrow x'' = \frac{F_{ix}}{m} + \frac{F_{mx}}{m} \text{ ja} \quad (25)$$

$$\sum F_z = m z'' = -F_{iz} + F_{mz} \Rightarrow z'' = \frac{F_{iz}}{m} + \frac{F_{mz}}{m}, \quad (26)$$

missä x'' on x-koordinaatin toinen aikaderivaatta eli kiihtyvyys [m/s²].

Näiden yhtälöiden avulla voidaan golfpallon liikettä kuvata melko tarkasti sen ilmalennon aikana. (Burglund, Street 2011)

5 GOLFPALLON LIIKKEEN MALLINNUS

Tässä työssä tutkitaan golfpallon liikeradan mallinnusta Python-ohjelmointikielellä. Laskennassa apuna on NumPy-kirjasto (Harris, Millman et al. 2020). Kuvaajien piirroksessa hyödynnetään Matplotlib-kirjastoa, jossa on tähän tarkoitukseen hyvin sopivia funktioita (Hunter 2007). Tässä työssä ei oteta huomioon golfpallon mahdollista pomppimista ja vierimistä laskeutumisen jälkeen. Lisäksi tehdään joitain olettamia laskennan yksinkertaistamiseksi.

5.1 Olettamat

Tässä työssä laskennan helpottamiseksi tehdään seuraavia oletuksia golfpallon lähtö-, lento- ja lyöntitilanteesta.

1. Golfpallon ja mailan osuma on aina samanlainen ja osuma oletetaan olevan aina mailan ihannekohdassa eli sweet spotissa, jolloin pallo lentää kaikista pisimmälle.
2. Pallo lähtee liikkeelle aina kohtisuorasti mailan nostokulman suhteen.
3. Tuulta ei oteta huomioon missään suunnassa.
4. Ympäristö on aina samanlainen koko lennon ajan. Lämpötila on 20 °C, ilman dynaaminen viskositeetti on $1.825 \cdot 10^{-5}$ kg/ms sekä ilman tiheys on 1.204 kg/m³.
5. Pallo pyörii koko ilmalennon ajan tasaisesti, eikä pyöräminen hidastu.
6. Pallon lentoa tarkastellaan vain x-y koordinaatistossa ja sivuttaisliikkeitä ei oteta lentoradassa huomioon.
7. Kaikessa laskennassa pallo lähtee liikkeelle pisteestä, jossa x- ja y-koordinaatti on 0. Laskenta loppuu, kun pallon korkeus palaa vaaka-akselille eli y koordinaatti on 0.
8. Pallo pyörii ainoastaan z akselin ympäri.

5.2 Laskentamalli

5.2.1 Ensimmäisen laskennan malli

Laskennassa pallon liikettä kuvataan kaavoilla (24) ja (25). Pallon lähtönopeudet suuntiin x ja y lasketaan kaavalla (9). Erilaisten mailojen nostokulmina käytetään taulukon 1 nostokulmia. Lähtö ja pyörimisnopeuksina käytetään taulukosta 2 löytyviä arvoja. Kuvan

5 funktioita käytetään muodostamaan funktiot, joilla kuvataan ilmanvastuksen suuruutta lennon aikana.

Laskennassa pallon pyörimisnopeus on oltava muodossa rad/s, kun taulukoidut arvot ovat rpm yksikössä. Muunnos voidaan tehdä kaavalla:

$$\omega = \frac{2\pi}{60} * N, \quad (27)$$

missä N on pyörimisnopeus (rpm). (Mäkelä, Soininen et al. 2017)

Laskentaa suoritetaan laskentapisteissä siten, että ensin valitaan pallon maksimi lentoaika, jonka jälkeen valitaan, kuinka monta laskentapistettä tälle lentomatkalle halutaan. Laskennan aika-askel valitaan laskemalla kahden perättäisen laskentapisteen erotus. Näitä edellä mainittuja laskentapisteitä lasketaan niin kauan, kunnes aika, joka aiemmin valittiin, on täynnä, taikka kun pallo osuu maahan, eli sen y-koordinaatti on 0. Tässä mallissa pallon nopeus ja siitä riippuvat voimat, jotka vaikuttavat lentorataan, lasketaan uudestaan jokaisessa laskentapisteessä, jotta saadaan mahdollisimman hyvin todellisuutta kuvaava malli.

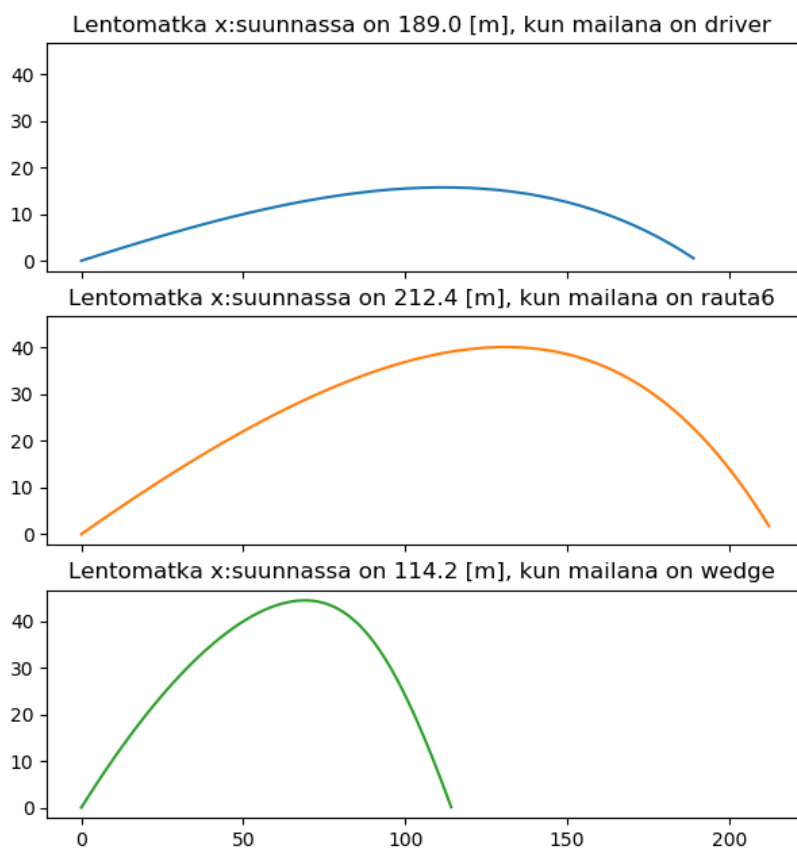
Laskennassa ilmanvastuksen luomaa voimaa kuvataan kaavoilla (21) ja (22), joissa C_D arvona toimii kuvassa 5 esitetyt funktiot:

$$C_D = \begin{cases} 1.29 * 10^{-10} * Re^2 - 2.59 * 10^{-5} * Re + 1.5, & \text{kun } Re < 75000 \\ 1.91 * 10^{-11} * Re^2 - 5.4 * 10^{-6} * Re + 0.56, & \text{kun } Re > 75000 \end{cases} \quad (28)$$

Nostevoimaa kuvaavat kaavat (18) sekä (19), s arvona toimii $s = 0.000005$, kuten on käytetty aiemmin tehdyssä vastaavassa laskennassa. (Burglund, Street 2011)

5.2.2 Ensimmäisen laskennan tulokset

Laskennan tuloksia verrattaessa muuhun vastaavaan laskentaan sekä todellisiin lentoratoihin, huomasi, että malli ei toimi, kun palloa lyödään suuremmilla lähtönopeuksilla ja pienillä pyörimisnopeuksilla ($N < 5000$ rpm). Pallon tulisi draiverilla lyödessä lentää tässä tilanteessa annetuilla lähtöarvoilla helposti yli 200 metriä jopa lähemmäs 300 metriä. Kuvasta 10 voidaan kuitenkin havaita, että näin ei tapahdu, ja driver lyöntien lentorata on malliltaan melko tasainen.

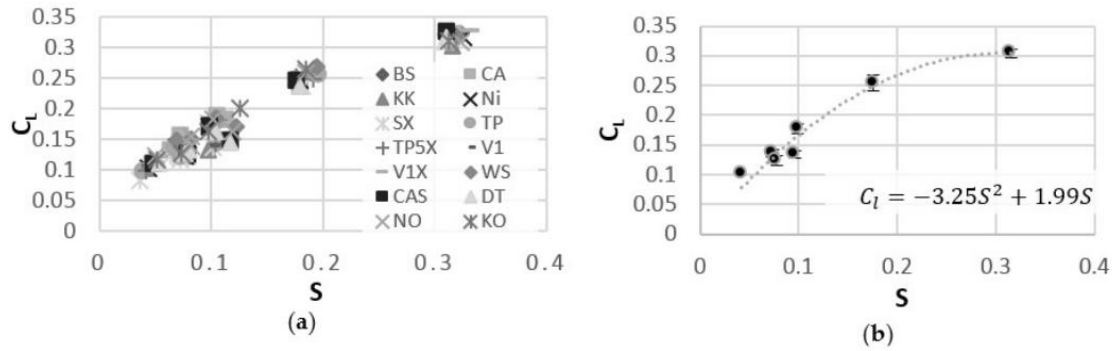


Kuva 10. Pallojen lentoratoja ensimmäisen laskentamallin tuloksista.

Arvioin ongelman johtuvan virheellisestä nostevoiman laskennasta. Asiaan lisää syventyessäni löysin vaihtoehtoisen tavan nostevoiman laskulle, jonka vaihdoin nykyisen tilalle toisessa laskentamallissa.

5.2.3 Toinen laskentamalli

Toisessa laskentamallissa nostevoimaa lähdettiin tarkastelemaan toisella menetelmällä. Noste taikka tarkemmin ilmaistuna Magnus-efekti on golfpallolle mahdollista laskea myös kaavalla, joka on esitetty kuvassa 11. Kuvassa on vasemmalla esitettynä golfpallon tuulitunnelitestauksen aikana mitattujen pyörimiskertoimien ja nostekertoimien suhteita.



Kuva 11. Nostevoiman ja pyörimiskertoimen suhde golfpallon tapauksessa (Lyu, Kensrud et al. 2018).

Oikealla kuvassa on KK nimisen pallon mittaustulokset ja näihin tuloksiin sovitettu käyrä, joka on muotoa:

$$C_L = -3.25 * S^2 + 1.99 * S, \quad (29)$$

missä S on pyörimiskerroin, joka voidaan laskea seuraavasti:

$$S = \frac{\omega r}{v}, \quad (30)$$

missä r on pallon säde [m]

v on pallon nopeus [m/s].

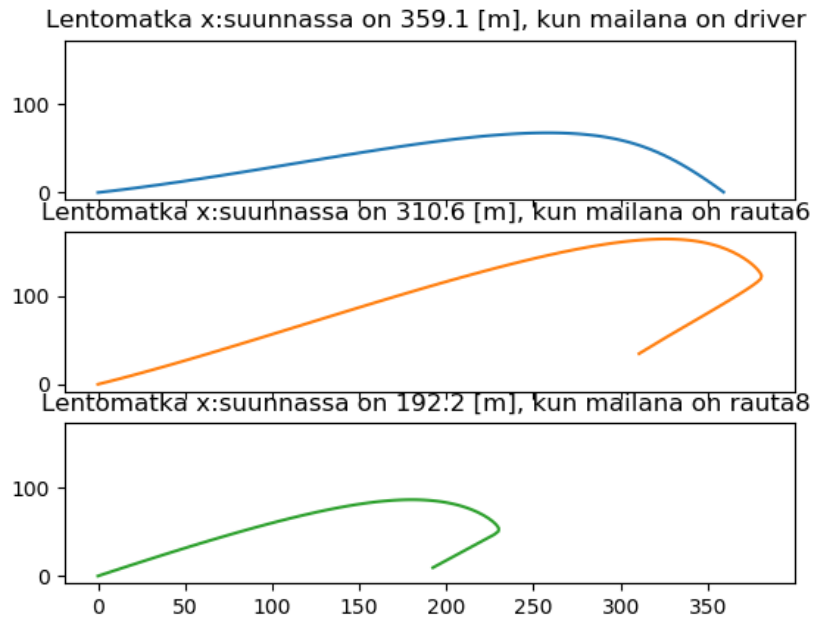
Näiden tietojen avulla voidaan muodostaa funktiot Magnus efektin luomalle nosteelle seuraavan yhtälön avulla:

$$C_L = \frac{2F_L}{\rho A v^2} \Rightarrow F_L = \frac{1}{2} \rho A v^2 C_L \quad (31)$$

Nyt yhdistämällä kaavojen (29), (30) ja (31) tiedot saadaan uusi tapa kuvata nosteen suuruutta lennon aikana. (Harris, Millman et al. 2020, Lyu, Kensrud et al. 2018)

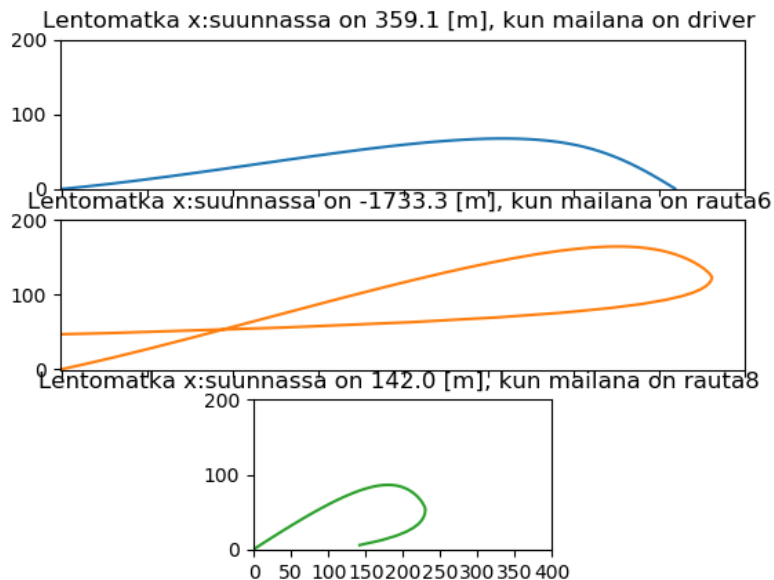
5.2.4 Toisen laskentamallin tulokset

Toisessa mallissa suurilla nopeuksilla ja pienillä pyörimisnopeuksilla lyötyjen lyöntien lentorata alkoi muistuttaa todellista lyöntiä, mutta hitaampien lyöntien, jossa pyörimisnopeutta oli paljon, lentoradat muuttuivat epätodellisiksi, sillä pallot alkoivat liikkua taaksepäin lennon lopulla. Lisäksi rautamailoilla (suuret lähtö pyörimisnopeudet) pallojen lennot olivat aivan liian pitkiä.



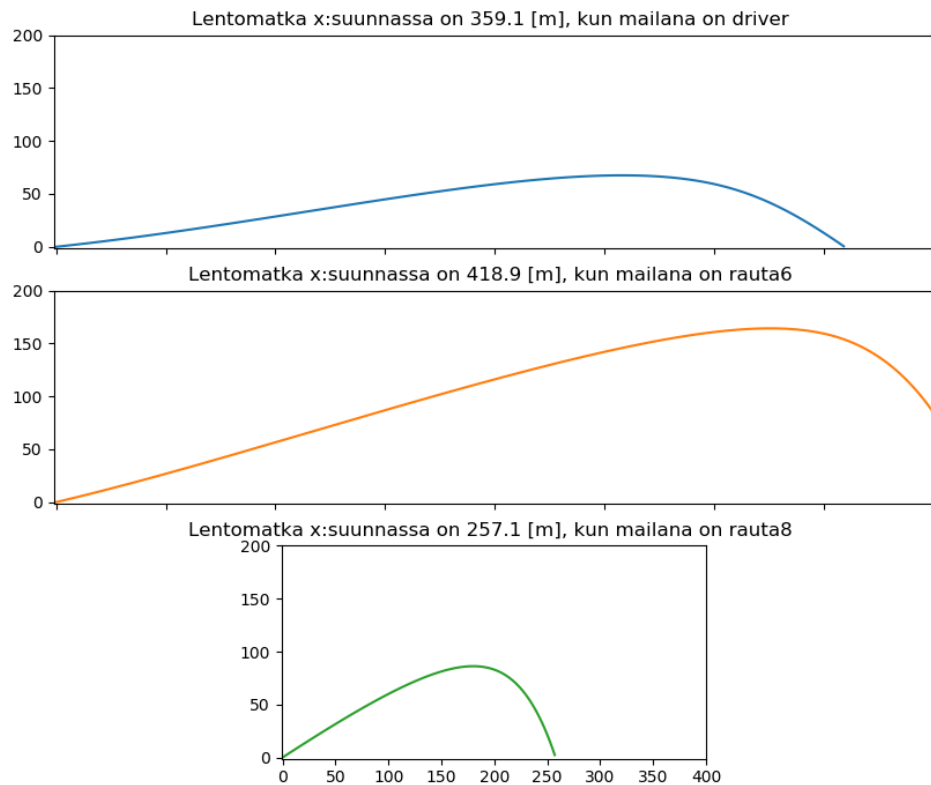
Kuva 12. Pallojen lentoratoja toisen laskentamallin tuloksista.

Muutin laskentamallia siten, että kielsin pallon negatiiviset nopeudet x-akselin suunnassa if-ohjelmointi rakenteella. Tästä seurasi kuvan 13 tilannetta vastaavat lentoradat. Nähdään, että esimerkiksi rauta 6 -mailalla lyödessä pallo lentää täysin epäluonnollisella lentoradalla. Havaitaan myös, että driver lyönti on erittäin pitkä.



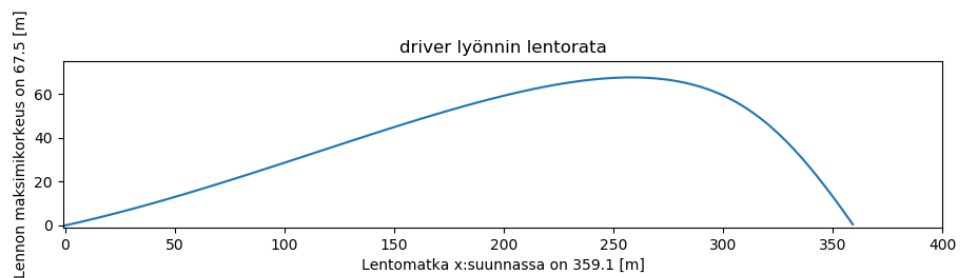
Kuva 13. Pallojen lentoratoja toisen laskentamallin tuloksista, kun negatiiviset nopeudet on kielletty.

Negatiivisen nopeuden lisäksi muutin mallia siten, että en sallinut Magnus-efektin luovan negatiivista voimaa x-akselinsuuntaan. Tämä kielto toteutettiin myös if-rakenteella.



Kuva 14. Pallojen lentoratoja toisen laskentamallin tuloksista, kun negatiiviset nopeudet sekä Magnus voimat on kielletty x-suunnassa.

Kuvasta 14 nähdään, että lentoradat muuttuivat todellisia lentoja vastaavaksi, mutta ovat pituudeltaan liian pitkiä. Muistetaan että laskentamalli 1 tuotti lentoratoja, jotka toimivat rautamaila lyönneille (suuret pyörimisnopeudet ja pienemmät liikenopeudet) hyvin.

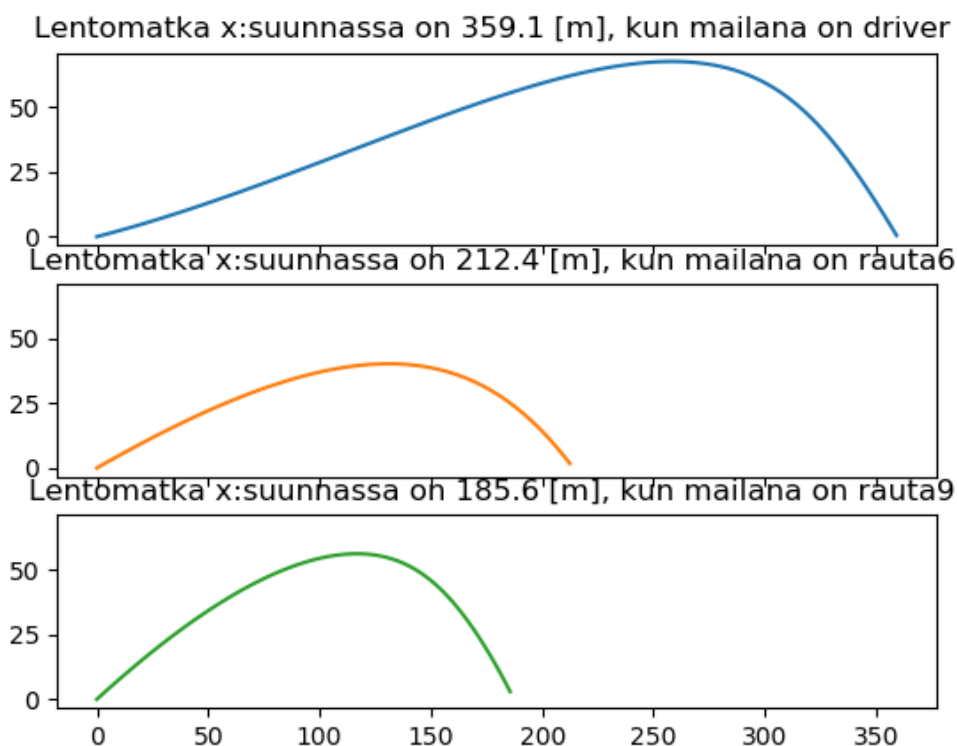


Kuva 15. Mallin 2 tuottaman draiver lyönnin lentorata.

5.2.5 Kolmas laskentamalli

Aiempien laskentamallien avulla on huomasiin, että ensimmäinen malli kykenee kuvaamaan suurien pyörimisnopeuksien sekä pienempien lentonopeuksien mukaisten lyöntien lentoratoja, kuten kuvan 10 keskimmäisestä kuvaajasta, jossa palloa lyödään rauta-6 -mailalla, nähdään. Toinen malli puolestaan kykenee kuvaamaan pallojen lentoa hyvin, kun niitä lyödään kovaa ja ne saavat hitaampia pyörimisnopeuksia. Tätä tilannetta vastaava lentorata voidaan nähdä kuvassa 15, jossa pallon lentorata näyttää luonnolliselle driverillä lyötynä.

Näitä malleja yhdistelemällä voidaan rakentaa malli, jossa pallon lentoa voidaan kuvata todenmukaisesti molemmissa tilanteissa. Malliin lisätään if-rakenne, jossa määrätään, kun mailana toimii driver tai hybridi niin laskenta tehdään mallin 2 mukaan ja kun mailana toimii mikä tahansa muu niin laskenta tapahtuu mallin 1 mukaan. Tästä seuraa kuvan 16 mukaisia lentoratoja.

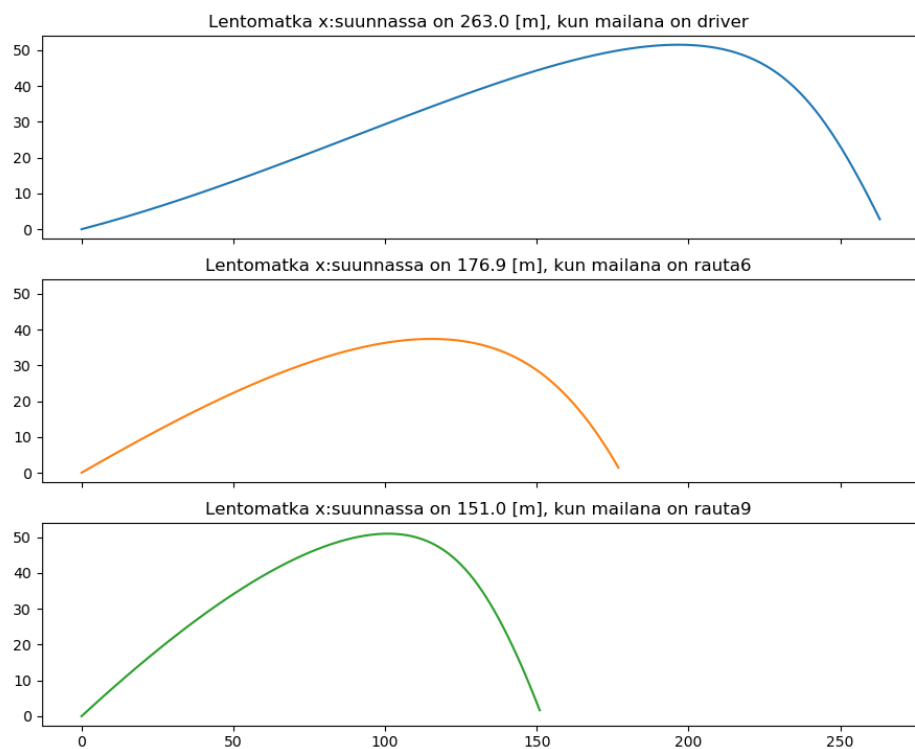


Kuva 16. Pallojen lentoratoja kolmannen laskentamallin tuloksista.

5.2.6 Laskennan tulokset

Todetaan, että tunnetuilla kaavoilla ei kyetä täysin mallintamaan golfpallon lentoa todennukaisen lentoradan mukaan. Kaavoilla kuitenkin kyetään mallintamaan pallon lentoa ja saamaan täten käsitys siitä, miten pallot lentävät erilaisilla lähtöarvoilla.

Kokeilin lopuksi vielä **lisätä hieman ilmanvastuksen suhteellista suuruutta** kertomalla ilmanvastus kertoimen 1.5. Tästä seurasi kuvan 17 mukaiset lentoradat, joita voisi pitää kaikista todennukaisimpina tässä työssä tarkastelluista lentoradoista. Kuvassa driverin lyönti lentää 263 metriä, joka on lähellä golfin ammattilaissarjan, PGA Tourin, keskiarvoa 270 m. (PGA tour 2020)



Kuva 17. Pallojen lentoratoja mallin 3 mukaisesti, kun ilmanvastus kerroin $C_D = 1.5 \times C_{D0}$.

6 YHTEENVETO

Tämän työn tarkoituksena oli muodostaa tietokoneohjelma, jonka avulla voidaan mallintaa golfpallon lentorataa. Mallissa oli tavoitteena ottaa huomioon golf pallon lentoon vaikuttavista tekijöistä painovoima, ilmanvastus sekä noste, joka palloon syntyy pyörimisen takia. Nosteen laskemiseksi työssä hyödynnettiin kahta erilaista laskentamallia, jotta tulokset olivat kaikille mailoille realistisia.

Ohjelma luotiin Python-ohjelmointikielellä. Ohjelmassa nosteen laskemiseksi hyödynnettiin kahta erilaista laskentamallia, riippuen siitä, millä mailalla palloa kussakin tilanteessa lyötiin. Näin kaikille lyönneille saatiin realistiset lentoradat. Pallojen lentoratoja on piirretty x-y koordinaatistoon ja näitä lentoratoja on tarkasteltu työn tuloksissa.

Lentoradoista havaittiin, että niillä kaavoilla, joilla laskentaa alettiin alustavasti tehdä, ei voida kuvata pallon lentorataa todenmukaisesti. Kun kaavoja hieman säädettiin, saatiin lennoista todenmukaisempia. Suurena ongelmana oli lopullisessa mallissa, driver lyöntien pituus. Lyönnit olivat liian pitkiä, kun niitä verrattiin todellisiin tilanteisiin. Ilmanvastuskertoimen suurentamisella (kertomalla 1.5) saatiin lennoista realistisen pituisia.

Paremmen laskentamallin aikaansaamiseksi tulisi pallojen ilmanvastuskerrointa tutkia korkeilla pyörimisnopeuksilla. Palloa wedge mailalla lyötäessä pallon pyörimisnopeus voi olla jopa yli 10 000 rpm kun työssä käytetyssä, tuulitunnelitestauksessa saadussa datassa suurin pyörimisnopeus oli 250 rpm.

7 LÄHDELUETTELO

Alam, F., Steiner, T., Chowdhury, H., Moria, H., Khan, I., Aldawi, F. & Subic, A., 2011. A study of golf ball aerodynamic drag. *Procedia Engineering*, 13, s. 226-231.

Aoyama, S., 2007. Golf Ball Aerodynamics [verkkodokumentti]. Saatavissa: http://www.furthereducationlessontrader.co.uk/Mech_Eng_Golf%20Ball%20Aerodynamics.pdf [viitattu 18.11.2020]. 5 s.

Burglund, B. & Street, R., 2011. Golf Ball Flight Dynamics [verkkodokumentti]. Saatavissa: <http://www.math.union.edu/~wangj/courses/previous/math238w13/Golf%20Ball%20Flight%20Dynamics2.pdf> [viitattu 18.11.2020]. 19 s.

ESHAAN 1992, 2013. Aerodynamic Drag of Car. Saatavissa: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Drag_coefficient&oldid=979927713#/media/File:Aerodynamic_Drag_of_Car.jpg [viitattu 18.11.2020]. CC BY-SA 3.0 lisenssi.

Foresight sports, 2013. An introduction to understanding ball launch & club data. [verkkodokumentti]. San Diego: Foresight sports. Saatavissa: <https://www.foresightsports.com/sites/default/files/files/Understanding%20Ball%20Launch%20%20Club%20Data.pdf> [viitattu 18.11.2020].

Foy, N., -02-17, 2019-last update, Beginners Buying Guide For Golf Club Sets [verkkodokumentti]. Southampton: Southampton golf club. Saatavissa: <https://southamptongolfclub.com/beginners-buying-guide-golf-club-sets/> [viitattu 18.11.2020].

Golfdigest, April 30, 2018-last update, Golf For Beginners: So You Want To Play Golf. [verkkodokumentti]. California: GolfDigest. Saatavissa: <https://www.golfdigest.com/gallery/golf-beginners-tips> [viitattu 18.11.2020].

Harris, C.R., Millman, K.J., Walt, Stéfan J. Van Der, Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N.J., Kern, R., Picus, M., Hoyer, S., Kerkwijk, M.H.V., Brett, M., Haldane, A., Río, J.F.D., Wiebe, M., Peterson, P., Gérard-marchant, P., Sheppard, K., Reddy, T., Weckesser, W., Abbasi, H., Gohlke, C. & Oliphant, T.E., 2020. Array programming with NumPy. *Nature*, 585 (7825), s. 357-362.

Hopley, M., 2019, Equipment reviews, Titleist Pro V1, Pro V1x 2019 Golf Ball Review [verkkodokumentti]. Edinburgh: Golfalot. Saatavissa: <http://www.golfalot.com/equipment-reviews/titleist-pro-v1-pro-v1x-2019-golf-ball-review-4163.aspx> [viitattu 20.11.2020].

Hunter, J.D., 2007. Matplotlib: A 2D Graphics Environment. *Computing in Science Engineering*, 9 (3), s. 90-95.

Jackson, J., 2018 Is your loft correct? [verkkodokumentti]. Granville: Granville golfland. Saatavissa: <https://www.granvillegolfland.com/blog/2018/7/10/blog-headline-7rzns> [viitattu 20.11.2020].

Kelley, B., 2019, Defining 'Out of Bounds' in Golf [verkkodokumentti]. New York: Liveabout. Saatavissa: <https://www.liveabout.com/out-of-bounds-definition-1561392> [viitattu 20.11.2020].

Levy, J., 2016. Golf Science: Golf Ball Flight Laws [verkkodokumentti]. Denver: Golftec. Saatavissa: <https://scramble.golftec.com/blog/2016/08/golf-ball-flight-laws/> [viitattu 20.11.2020].

Lyu, B., Kensrud, J., Smith, L. & Tosaya, T., 2018. Aerodynamics of Golf Balls in Still Air. Proceedings, 2, s. 238.

Mäkelä, M., Soininen, L., Tuomola, S. & Öistämö, J., 2017. Tekniikan Kaavasto. 17-painos . Tampere: AMK-Kustannus oy, 205s. ISBN 9789525491487.

Mcanally, G., How Does Spin Affect A Golf Shot?. United States: Golfink. Saatavissa: https://www.golfink.com/list_183_spin-affect-golf-shot.html [viitattu 20.11.2020].

PGA TOUR, 2020, Driving Distance | PGA TOUR Stats[verkkodokumentti]. Florida: PGA Tour Saatavissa: <https://www.pgatour.com/stats/stat.101.html> [viitattu 21.11.2020].

RDURKACZ, 2013. Magnus effect. Saatavissa: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Magnus_effect&oldid=988914974#/media/File:Sketch_of_Magnus_effect_with_streamlines_and_turbulent_wake.svg [viitattu 20.11.2020]. CC BY-SA 3.0 lisenssi.

Sherman, J., 06.06., 2017-last update, Smash Factor: What is it? Why Is It So Important for Golfers? [verkkodokumentti]. New York: Practical Golf. Saatavissa: <https://practical-golf.com/smash-factor/> [viitattu 20.11.2020].

THEOTHERJESSE, 2009. Drag coefficient. Saatavissa: <https://en.wikipedia.org/wiki/User:TheOtherJesse/Gallery#/media/File:14ilf11.svg> [viitattu 20.11.2020]. CC BY-SA 3.0 lisenssi.

TITLEIST.COM, b, 2020a-last update, Titleist T300 Irons | T300 Irons | Titleist Irons [verkkodokumentti]. Fairheaven: Titleist. Saatavissa: <https://www.titleist.com/golf-clubs/irons/t300> [viitattu 20.11.2020].

TITLEIST.COM, a, 2020b-last update, Titleist TS3 Driver | TS3 Titleist Golf Driver | Titleist [verkkodokumentti]. Fairheaven: Titleist Saatavissa: <https://www.titleist.com/golf-clubs/golf-drivers/ts3> [viitattu 20.11.2020].

TORO-TAROU, 2010. Golf field. Saatavissa: https://fi.wikipedia.org/wiki/Golfkentt%C3%A4#/media/Tiedosto:Golf_field.svg [viitattu 23.11.2020]. CC BY-SA 3.0 lisenssi.

Zátonyi, S., 2020. Projectile motion. Projectile motion. Saatavissa:
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Projectile_motion&oldid=988541910#/media/File:Ferde_hajitas5.svg [viitattu 24.11.2020]. CC BY-SA 3.0 lisenssi

Liite 1, ohjelman koodi

```
1. """
2. Tämä ohjelma laskee ja piirtää golfpallon liikeratoja
3. Tekijä Petteri Lintula
4. Ohjelma on osa kandidaatintyötä, jossa on tehtävä mallintaa golfpallon liikera-
   taa
5. """
6. import numpy as np
7. import matplotlib.pyplot as plt
8.
9. MAILAT = {
10. # Erilaisten mailojen nostokulmat, ja lyönti tiedot
11. # Tiedot ovat seuraavassa järjestyksessä
12. # [loft angle, pienempi nopeus, ja pyörintä, suurempi nopeus, ja pyörintä]
13. # [deg, km/h, rpm, km/h, rpm]
14. "driver" : [12.5, 209, 3000, 274, 2500],
15. "hybridi" : [17 , 203, 4038, 225, 4378],
16. "rauta4" : [20 , 198, 4593, 217, 4716],
17. "rauta5" : [23 , 190, 4939, 211, 5115],
18. "rauta6" : [26 , 183, 5986, 206, 6063],
19. "rauta7" : [29 , 175, 6979, 196, 6585],
20. "rauta8" : [33 , 167, 7196, 187, 7725],
21. "rauta9" : [38 , 158, 8025, 175, 9018],
22. "wedge" : [48 , 130, 9341, 134, 11265]
23. }
24.
25. def vastusk(v):
26. # Laskee ilmanvastuskertoimen
27. # In : nopeus
28. # out : ilmanvastuskerroin
29. rho = 1.204 #Ilman tiheys T=20 [kg/m^3]
30. my = 1.825e-5 #Ilman dyn. visk T=20 [kg/ms]
31. d = 0.0427 #Pallonhalkaisija [mm]
32. #Lasketaan reynoldsin luku valinnalle
33. Rey = (rho * v * d)/my
34. # Tehdään ehto tunnettujen kaavojen mukaiseksi
35. if Rey > 75000:
36. Cd = 1.91e-11 * Rey**2 - 5.40e-6 * Rey +0.56
37. else:
38. Cd = 1.29e-10 * Rey**2 - 2.59e-5 * Rey +1.5
39. return Cd
40.
41. def nostek(w, v, r):
42. # LASkee nostekertoimen mallin 2 mukaisesti
43. # in: kulmanopeus, nopeus sekä säde
44. # out: Nostekerroin
45. S = (w * r)/v
46. Cl = -3.25 * S**2 + 1.99 * S
47. return Cl
48.
49. def noste_hidas(vx, vy, w):
50. # LASkee nosteen määrän mallin 1 mukaisesti
51. # in: nopeudet suuntiin x ja y sekä kulmanopeus
52. # out : Nostevoiman komponentit suunnassa x ja y
53. S = 0.000005
54. Fmx = S * (-w * vy)
55. Fmy = S * w * vx
56. if Fmx <0:
57. Fmx = 0
58. Fm = [Fmx, Fmy]
59. return Fm
60.
61. def lähtönopeus(v0,alfa):
62. # LASkee pallon lähtönopeuden komponentit
63. #input pallon lähtönopeus ja suunta
```

```

64.     # Out pallon lätkökomponentit
65.     # Out : [x, y]
66.     kmh2ms = 1/3.6          # Nopeuden muutos km/h -> m/s
67.     v0 = v0* kmh2ms
68.     kulma = np.radians(alfa)
69.     v0y = v0 * np.sin(kulma)
70.     v0x = v0 * np.cos(kulma)
71.     v_a = [v0x, v0y]
72.     return v_a
73.
74. def lento(Maila, teksti, aika = 100):
75.     # Laskee ja piirtää golfpallon lentoradan
76.     # in : Mailan data, valintateksti, tarkastelu lentoaika
77.     # out kuva lentoradasta
78.
79.     t = np.linspace(0, aika, 10000) # Laskentapisteet
80.     dt = t[1] - t[0]                # Aika-askeleen suuruus [s]
81.     g = 9.81                        # Putoamiskiihtyvyys [kg/m s^2]
82.     m = 0.045                       # Pallon massa [kg]
83.     rho = 1.204                     # Ilman tiheys T=20 [kg/m^3]
84.     my = 1.825e-5                  # Ilman dyn. viskT=20 [kg/ms]
85.     d = 0.0427                     # Pallonhalkaisija [m]
86.     w_muunto = (2*np.pi)/60        # Pyörimisen muunto [rad/s]
87.     kmh2ms = 1/3.6                # Nopeuden muutos km/h -> m/s
88.
89.     w = w_muunto * Maila[-1]         #[rad/s]
90.     A = np.pi*0.25*(d**2)          #[m^2]
91.
92.
93.     # Tallennetaan alkupistesekä alkunopeus ja tehdään listat plotteja varten
94.
95.     [vx0, vy0] = lähtönopeus(Maila[3], Maila[0])
96.     vx = [vx0]
97.     vy = [vy0]
98.
99.     [x0, y0] = [0, 0]
100.    x = [x0]
101.    y = [y0]
102.
103.    #Tehdään looppi, jolla käydään läpi koko lentomatka
104.    for i in range(1, len(t)):
105.        #Vaikuttavat voimat
106.
107.        #Painovoima
108.        G = m * g
109.
110.        # Ilmanvastukset
111.        #lasketaan pallon absoluuttinen nopeus
112.        v_k = np.sqrt((vx[-1]**2 + vy[-1]**2))
113.        #lasketaan vastuskerroin tälle hetkelliselle nopeudelle
114.        Cd = 1.4*vastusk(v_k)
115.        #Lasketaan tätä kerrointa vastaavat komponentit
116.        Fix = 0.5 * Cd * rho * A * vx[-1]**2
117.        Fiy = 0.5 * Cd * rho * A * vy[-1]**2
118.
119.        # Magnuksen luomat voimat
120.        # Luodaan ehto,
121.        # jos lyödään driverillä niin noste lasketaan mallin 2 mukaan
122.        # muuten lasketaan mallin 1 mukaan
123.
124.        if teksti == "driver" or teksti == "hybridi":
125.            C1 = nostek(w, vx[-1], d/2)
126.            Fmx = 0.5 * C1 * rho * A * vy[-1]**2
127.            Fmy = 0.5 * C1 * rho * A * vx[-1]**2
128.        else:
129.            Fmx, Fmy = noste_hidas(vx[-1], vy[-1], w)
130.
131.        if Fmx < 0:

```

```

130.             # Luodaan ehto,
131.             # jos magnusvoima x suunnassa on negatiivinen
132.             # niin sitä ei huomioida lainkaan
133.             Fmx = 0
134.
135.             #Lasketaan uudet positiot ja nopeudet
136.
137.             x1 = x[-1]+vx[-1]*dt + ((-Fix+Fmx)*dt**2)/(2*m)
138.             y1 = y[-1]+vy[-1]*dt + ((-Fiy+Fmy-G)*dt**2)/(2*m)
139.
140.             v1x = vx[-1] + ((-Fix + Fmx)/m)*dt
141.             v1y = vy[-1] + ((-Fiy + Fmy - G)/m)*dt
142.
143.             if v1x < 1:
144.                 # Ei sallita negatiivista nopeutta x-suunnassa
145.                 v1x = 0.9* vx[-1]
146.
147.             if y1 > -0.1:
148.                 # jos pallo on ilmassa (y-koordinaatti >0)
149.                 # lisätään pallon paikaktiedot ja nopeustiedot listoihin
150.                 x.append(x1)
151.                 y.append(y1)
152.                 vx.append(v1x)
153.                 vy.append(v1y)
154.             else:
155.                 # Kun pallo osuu maahan niin laskenta lakkaa
156.                 break
157.
158.
159.             # Loput on kuvan piirtoon liittyvää koodia
160.             plt.plot(x, y)
161.             plt.axis('square') # laitetaan akselit samalle skaalalle 1:1
162.             text = teksti + " lyönnin lentorata"
163.             plt.title(text)
164.             lentox = "Lentomatka x:suunnassa on {} [m]"
165.             lentoy = "Lennon maksimikorkeus on {} [m]"
166.             plt.xlabel(lentox.format(round(x[-1],1)))
167.             plt.ylabel(lentoy.format(round(np.max(y),1)))
168.             plt.xlim(-1,300)    # X akselin rajat
169.             plt.ylim(-1,75)     # Y akselin rajat
170.             plt.show()
171.
172.             # Tässä valintaan mailan jolla lyöjä lyö!!!
173.             valinta = "driver"
174.
175.             lento(MAILAT[valinta], valinta)

```